

2. 試求下列各函數的定義域：

$$(1) f(x) = 2x + 3$$

$$(2) f(x) = \frac{1}{x-2}$$

$$(3) f(x) = \sqrt{x+1}$$

【例題 1】

$$(1) f(x) = \{x \in \mathbb{R}\}$$

$$(2) f(x) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$$

$$(3) \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$$

3. 試畫出函數 $f(x) = |x| + 1$ 的圖形。

【例題 2】

$$\{x \in \mathbb{R}\}$$

$$x \geq 0$$

$$f(x) = x + 1$$

x	0	1
y	1	2

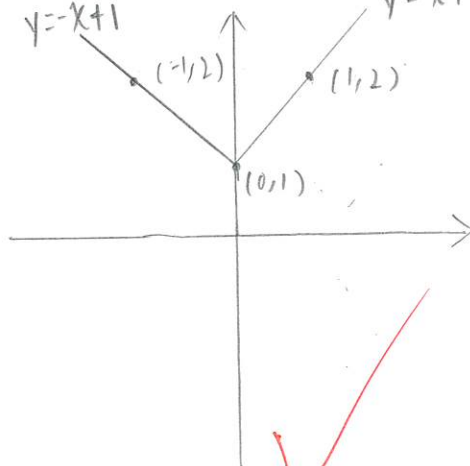
$$y = x + 1$$

$$x < 0$$

$$f(x) = -x + 1$$

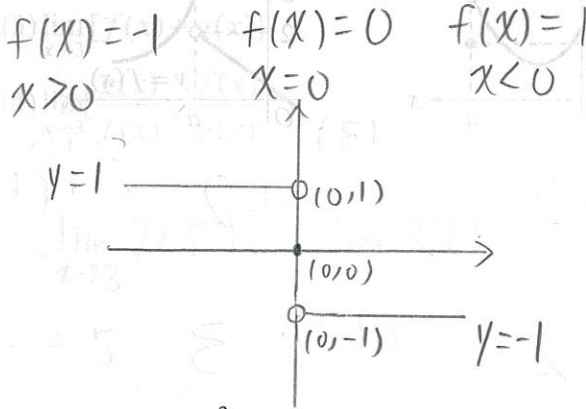
x	0	-1
y	1	2

$$y = -x + 1$$



4. 試畫出函數 $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{當 } x > 0 \\ 0, & \text{當 } x = 0 \\ 1, & \text{當 } x < 0 \end{cases}$ 的圖形。

【隨堂 P95】



5. 設函數 $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ ($x \neq 3$)。

(1) 試畫函數 $f(x)$ 的圖形。

(2) 求 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 。

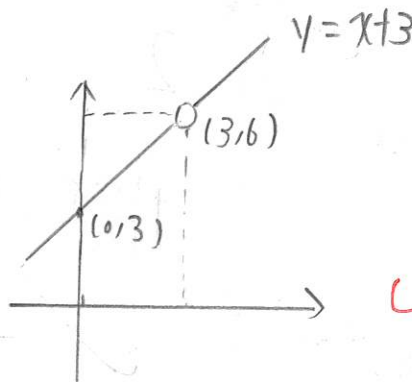
【例題 4】

(1)

$$f(x) = \frac{x^2 - 3^2}{x - 3} = \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = x+3$$

$$x=3, y=6$$

$$\frac{x}{y} \Big| \frac{3}{6} \Big| \frac{0}{3}$$



(2)

$$\lim_{x \rightarrow 3} x+3$$

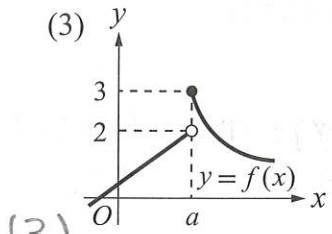
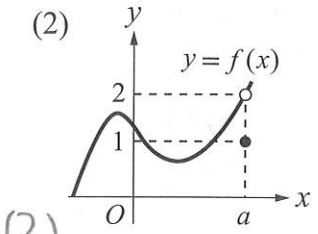
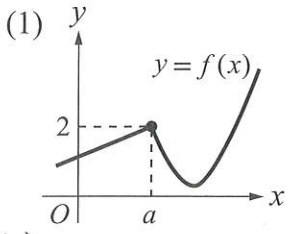
$$= \lim_{x \rightarrow 3} 3+3$$

$$= 6$$

左極限 右極限 極限 函數

6. 根據下列 $y=f(x)$ 的函數圖形，求 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ 、 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 與 $f(a)$ 的值。

【例題 5】



(1)	(2)	(3)
$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$	2	2
$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$	2	3
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	2	不存在
$f(a)$	2	3

7. 試求下列各極限：

- (1) $\lim_{x \rightarrow 1} 2$ (2) $\lim_{x \rightarrow 3} x$ (3) $\lim_{x \rightarrow -2} x^3$

【隨堂 P102】

- (1) 2
 (2) 3
 (3) $(-2)^3 = -8$

8. 設函數 $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x^2 + 1$, 試求:

(1) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

(2) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$

(3) $\lim_{x \rightarrow 3} [f(x) + g(x)]$

(4) $\lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{g(x)}{f(x)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right]$

【例題 7】

(1) $\lim_{x \rightarrow 3} 2 \times 3 - 1$ (2) $\lim_{x \rightarrow 3} 3^2 + 1$ (3) $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) + (x^2 + 1)$

$= 5$

$= 10$

$= \lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 2x$

$= \lim_{x \rightarrow 3} 3^2 + 2 \times 3$

$= 15$

(4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 1}{2x - 1} - \frac{2x - 1}{x^2 + 1}$

$= \frac{10}{5} - \frac{5}{10} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

9. 求下列各極限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

(2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 3}{x + 1}$

(1) $x \neq 2$
 $x - 2$
 $x - 1$

(2) $x \neq -1$
 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-1 - 3}{-1 + 1}$

$(x - 2)(x + 1)$
 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2}$

$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-4}{0}$

$= \lim_{x \rightarrow 2} x + 1$

$=$ 不存在

$= \lim_{x \rightarrow 2} 2 + 1$

$= 3$

【例題 8】

10. 設函數 $f(x)$ 滿足 $2x \leq f(x) \leq x^5 - x^3 + 2$, 其中 $-1 < x < 2$ 且 $x \neq 1$, 求 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} 2x &= \lim_{x \rightarrow 1} 2 \cdot 1 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1} (x^5 - x^3 + 2) &= 1^5 - 1^3 + 2 = 2 \end{aligned} \quad 2 \leq f(x) \leq 2 \quad \text{【例題 9】}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$



11. 設函數 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5, & x \geq 1 \\ kx + 2, & x < 1 \end{cases}$, 若已知 $f(x)$ 在 $x = 1$ 處連續, 試求實數 k 的值。

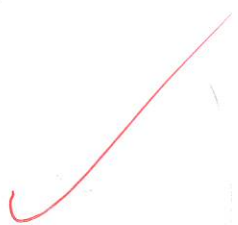
$$\lim_{x \rightarrow 1} (kx + 2) = k + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 5) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 6$$

$$k + 2 = 6$$

$$k = 4$$

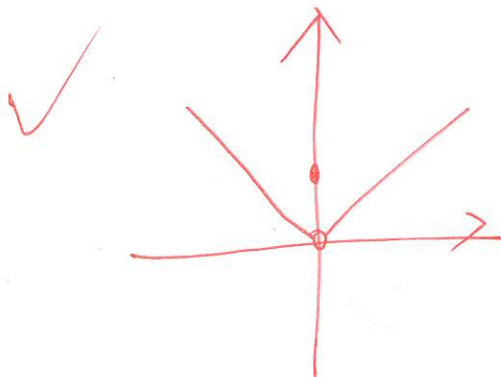


12. 設函數 $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 試問函數 $f(x)$ 在 $x = 0$ 是否連續? 【例題 11】

x	0	1	-1	2	-2
$ x $	1	1	1	2	2

否

不連續



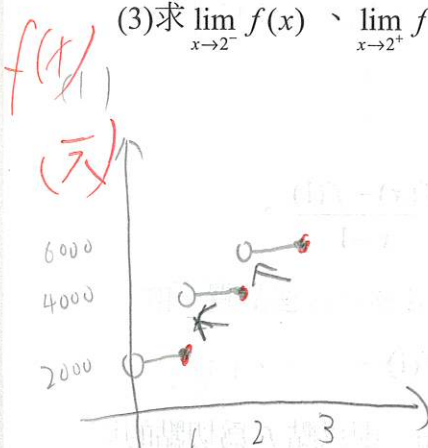
進階題

13. 假設租車一天費用為 2000 元，令 $f(x)$ 為租汽車 x 天的租金。

(1) 試畫出 $y=f(x)$ ，且 $0 < x \leq 3$ 的函數圖形。

(2) 試問 $y=f(x)$ 在 $0 < x \leq 3$ 的函數圖形是否連續？若不連續指出在何處為不連續。

(3) 求 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ 、 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ 、 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 。



(2) 否 (3)
不連續

1, 2

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4000$ ✓

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \text{不存在}$ ✓

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 6000$ ✓

1, 2

✓

X

100

導師楊添智

3

微分

3-2 多項式函數的導數與導函數

基礎題

1. 下列敘述正確的打「○」，錯誤的打「×」：

(~~○~~) (1) 若 $f(x) = 1$ ，則 $f'(100) = 1$ 。

(○) (2) 若函數 $f(x)$ 在 $x = 1$ 處可微分，則 $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ 。

(○) (3) 函數 $f(x) = |x|$ 在 $x = 1$ 處可微分。

(○) (4) 若函數 $f(x)$ 在 $x = 1$ 處可微分，則 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 。

(~~○~~) (5) 若 $P(1, 3)$ 是可微分函數 $y = f(x)$ 圖形上的一點，則以點 P 為切點的切線斜率是 $f'(3)$ 。

2. 求函數 $f(x) = x^2 - x + 2$ 在 $x = 1$ 處的導數 $f'(1)$ 。

【例題 1】

$$f(x) = 2x - 1 \quad \checkmark$$

$$f'(1) = 2 \times 1 - 1$$

$$= 1 \quad \checkmark$$

習題 3-2

3. 利用 $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ ，求函數 $f(x) = x^2 - x + 2$ 在 $x = 1$ 處的導數

$f'(1)$ 。

【例題 2】

$$f'(x) = 2x - 1$$

$$f'(1) = 2 \times 1 - 1$$

$$= 1$$

4. 已知一質點運動的速度函數為 $v(t) = 5t$ ，求此質點在時刻 $t = 2$ 的瞬時加速度。

$$a = v'(t) = 5 \frac{m}{sec^2}$$

【隨堂 P120】

5. 已知函數 $f(x) = x^2 + 1$ 的圖形上有一點 $P(1, 2)$ ，試求：

(1) 以 P 為切點的切線斜率。

(2) 以 P 為切點的切線方程式。

【例題 4】

(1)

$$f'(x) = 2x$$

$$f'(1) = 2$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

(2)

$$(y-2) = 2(x-1)$$

$$= 2x - 2$$

$$2x - y = 0$$