3-1 函數的極限

(D) **1.** 求$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2-h}}{h}=$？ (A)$\frac{1}{4}$ (B)$\frac{\sqrt{2}}{4}$ (C)$\frac{1}{2}$ (D)$\frac{\sqrt{2}}{2}$。【104 數 C 統測】

SOL:**1.**所求$\displaystyle=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{2+h}-\sqrt{2-h})(\sqrt{2+h}+\sqrt{2-h})}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2-h})}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{2+h})^2-(\sqrt{2-h})^2}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2-h})}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)-(2-h)}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2-h})}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2-h})}=\lim_{h\to 0}\frac{2}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2-h}}=\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$ 。

(C) **2.** 若$f(x)=\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2x}{x^2-1}$（$x\neq\pm1$），則$\displaystyle\lim_{x\to 1}f(x)$之值為何？

(A)不存在 (B) 0 (C)$\frac{1}{2}$ (D) 1。【107 數 B 統測】

SOL:**2.**所 求 $\displaystyle=\lim_{x\to 1}(\frac{x}{x-1}-\frac{2x}{x^2-1})=\lim_{x\to 1}(\frac{x}{x-1}-\frac{2x}{(x+1)(x-1)})=\lim_{x\to 1}\frac{x(x+1)-2x}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$ 。

(B) **3.** 關於下列各極限，何者錯誤？ (A)$\displaystyle\lim_{x\to 2^-}\sqrt[3]{x-2}=0$ (B)$\displaystyle\lim_{x\to 2^-}\sqrt{x-2}=0$

(C)$\displaystyle\lim_{x\to 2^+}\sqrt[3]{x-2}=0$ (D)$\displaystyle\lim_{x\to 2^+}\sqrt{x-2}=0$。【109 數 C 統測】

SOL:**3.** (A)$\displaystyle\lim_{x\to 2^-}\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2-2}=\sqrt[3]{0}=0$ 。 (B)$\because\sqrt{x-2}$的定義域為$\{x\mid x\in\mathbb{R}，x\geq 2\}$，

$\therefore\displaystyle\lim_{x\to 2^-}\sqrt{x-2}$不存在。

(C) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+}\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2-2}=\sqrt[3]{0}=0$ 。 (D) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+}\sqrt{x-2}=\sqrt{2-2}=\sqrt{0}=0$ 。

3-2 多項式函數的導數與導函數、3-3 微分公式

(A) **4.** 若$f(x)=\dfrac{x(x-1)(x-2)}{x-5}$，則$f'(0)=$？ (A)$-\frac{2}{5}$ (B)$-\frac{1}{5}$ (C)$\frac{1}{5}$ (D)$\frac{2}{5}$。

【98 數 C 統測】

SOL:**4.** $\displaystyle f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x(x-1)(x-2)}{x-5}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)(x-2)}{x-5}=\frac{(-1)\times(-2)}{-5}=-\frac{2}{5}$ 。

(B) **5.** 關於函數的導函數，下列何者正確？ (A) $f(x)=(4x+5)(6x+7)$，則 $f'(x)=24$

(B) $f(x)=\sqrt[3]{x^7}+4x$，則 $f'(x)=\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}+4$ (C) $f(x)=(4x+5)^2$，則 $f'(x)=2(4x+5)$

(D) $f(x)=\frac{4x+4}{x+1}$，則 $f'(x)=4$。 【99 數 C 統測】

SOL:**5.** (A) $f'(x)=(4x+5)'(6x+7)+(4x+5)(6x+7)'=4(6x+7)+(4x+5)\times 6$

$\neq 24$。

(B) $f(x)=\sqrt[3]{x^7}+4x=(x^7)^{\frac{1}{3}}+4x=x^{\frac{7}{3}}+4x$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{7}{3}x^{\frac{7}{3}-1}+4=\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}+4$。

(C) $f'(x)=2(4x+5)\times(4x+5)'=2(4x+5)\times 4=8(4x+5)$。

(D) $f(x)=\frac{4x+4}{x+1}=4\Rightarrow f'(x)=0$。

(D) **6.** 若 $f(x)=(x-1)^5$，且 $f'(x)$為 $f(x)$的一階導函數，則 $\lim_{x\to 2}\frac{f'(x)-f'(2)}{x-2}=$？

(A) 0 (B) 1 (C) 5 (D) 20。 【100 數 C 統測】

SOL:**6.** $f'(x)=5(x-1)^4\times 1=5(x-1)^4$，

$f''(x)=20(x-1)^3\times 1=20(x-1)^3$，

所求 $=f''(2)=20\times(2-1)^3=20$。

7. (A) 若函數 $f(x)$的導函數為 $f'(x)=x^2-6x$，則 $\lim_{x\to 6}\frac{f(x)-f(6)}{x-6}$ 之值為何？

(A) 0 (B) 1 (C) 6 (D)不存在。 【101 數 C 統測】

SOL:**7.** 所求 $=f'(6)=6^2-6\times 6=0$。

(D) **8.** 已知 a、b 為實數，$f(x)=(ax+b)^3$。若 $f(2)=1$ 且 $f'(2)=6$，則 $a-b=$？

(A) -2 (B) -1 (C) 3 (D) 5。 【102 數 C 統測】

SOL:**8.** $f'(x)=3(ax+b)^2\times a$，$\begin{cases}f(2)=1\\ f'(2)=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(2a+b)^3=1\\ 3(2a+b)^2\times a=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a+b=1 & \cdots\cdots ①\\ a(2a+b)^2=2 & \cdots\cdots ②\end{cases}$，

①代入②得 $a=2$，代入①得 $4+b=1\Rightarrow b=-3$，$\therefore a-b=5$。

(D) **9.** 設 $f(x)=\dfrac{x(x-1)(x-4)}{(x+1)(x+2)}$，則導數 $f'(0)$之值為何？

(A) – 2　(B) – 1　(C) 0　(D) 2。 【103 數 C 統測】

SOL:**9.** $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x(x-1)(x-4)}{(x+1)(x+2)}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-1)(x-4)}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{(-1)\times(-4)}{1\times 2}=2$。

(B) **10.** 已知 a、b 為實數，若過函數 $f(x)=ax^2+bx$ 圖形上一點 $P(1, 5)$的切線斜率為 3，則 $f'(2)=$？ (A) – 3　(B) – 1　(C) 1　(D) 3。 【104 數 C 統測】

SOL:**10.** $f'(x)=2ax+b$，∵切點為(1, 5)，∴$f(1)=5\Rightarrow a+b=5$......①

∵在 $x=1$ 處的切線斜率為 3，∴ $f'(1)=3\Rightarrow 2a+b=3$......②

由①②得 $a=-2$，$b=7$， $f'(x)=-4x+7$，∴ $f'(2)=-8+7=-1$。

(A) **11.** 已知 $f(x)=\dfrac{x(2x-1)(13x+2)^4}{\sqrt{27x+9}}$，求 $f(x)$在 $x=0$ 的導數 $f'(0)$之值

(A) $-\dfrac{16}{3}$　(B) $-\dfrac{8}{3}$　(C) $-\dfrac{4}{3}$　(D) $-\dfrac{1}{3}$。 【105 數 C 統測】

SOL:**11.** $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x(2x-1)(13x+2)^4}{\sqrt{27x+9}}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2x-1)(13x+2)^4}{\sqrt{27x+9}}=\dfrac{-1\times 2^4}{\sqrt{9}}=-\dfrac{16}{3}$。

(D) **12.** 已知 a、b 為實數，且 $f(x)=x^3+ax^2+bx+13$。若 $f'(-1)=1$ 且 $f'(0)=2$，則 $a+b=$？ (A) – 1　(B) 0　(C) 3　(D) 4。 【106 數 C 統測】

SOL:**12.** $f'(x)=3x^2+2ax+b$， $\begin{cases}f'(-1)=1\\ f'(0)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3-2a+b=1\\ b=2\end{cases}\Rightarrow a=2$，$b=2$，∴$a+b=4$。

(D) **13.** 在坐標平面上，函數 $f(x)=\dfrac{3}{2}x^2-3x+1$的圖形於切點(2, 1)的切線斜率為何？

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3。 【107 數 B 統測】

SOL:**13.** $f'(x)=3x-3$，所求 $=f'(2)=3$。

(A) ***14.*** 若 $f(x)=\dfrac{-3(x+1)}{x^4+x^2+1}$，則 $f'(-1)$之值為何？

(A) – 1　(B) 0　(C) 1　(D) 2。【107 數 B 統測】

SOL:***14.*** $f'(-1)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-(-1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\dfrac{-3(x+1)}{x^4+x^2+1}-0}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-3}{x^4+x^2+1}=\dfrac{-3}{1+1+1}=-1$。

(B) ***15.*** 若直線 L 過點(9, 5)，且與函數 $y=f(x)$的圖形相切於點(3, 1)，則 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=$？ (A) $\dfrac{1}{3}$　(B) $\dfrac{2}{3}$　(C) $\dfrac{3}{2}$　(D) 3。【107 數 C 統測】

SOL:***15.*** ∵L 過點(9, 5)及(3, 1)，∴ $m_L=\dfrac{5-1}{9-3}=\dfrac{2}{3}$，所求 $=f'(3)=m_L=\dfrac{2}{3}$。

(D) ***16.*** 設函數 $f(x)=x^3-x^2+x-2$。試問 $f'(1)+f''(1)$之值為何？

(A) 1　(B) 2　(C) 4　(D) 6。【108 數 B 統測】

SOL:***16.*** $f'(x)=3x^2-2x+1$， $f''(x)=6x-2$，所求 $=2+4=6$。

(B) ***17.*** 已知函數 $f(x)$的導函數為 $g(x)=x^2-4x+2$，則 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=$？

(A) – 2　(B) – 1　(C) 1　(D) 2。【108 數 C 統測】

SOL:***17.*** $f'(x)=g(x)$，所求 $=f'(1)=g(1)=-1$。

3-4 微分的應用

(C) **18.** 若 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+3$的相對極大值為 a，相對極小值為 b，則 $a+b=$？

(A) $\frac{-27}{2}$ (B) $\frac{-3}{2}$ (C) $\frac{-1}{2}$ (D) $\frac{27}{2}$ 。 【106 數 C 統測】

SOL:**18.** $f'(x)=3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2)$，

x		-1		2	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	□		□		□

$a=f(-1)=-1-\frac{3}{2}+6+3=\frac{13}{2}$，

$b=f(2)=8-6-12+3=-7$，$\therefore a+b=-\frac{1}{2}$ 。

(C) **19.** 小明設計了一款迴力鏢，已知將此迴力鏢擲出後，迴力鏢過了時間 t 秒後與小明的距離為 $f(t)=\frac{100t}{t^2+9}$ 公尺，若在 t_0 秒時，迴力鏢離小明最遠，則 $t_0=$？

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。 【108 數 C 統測】

SOL: **19.** $f'(t)=\frac{(100t)'\times(t^2+9)-100t(t^2+9)'}{(t^2+9)^2}=\frac{100(t^2+9)-100t\times 2t}{(t^2+9)^2}=\frac{-100t^2+900}{(t^2+9)^2}$

$=\frac{-100(t^2-9)}{(t^2+9)^2}=\frac{-100(t+3)(t-3)}{(t^2+9)^2}$，

又 $t\geq 0$，

t	0		3	
$f'(t)$		+		−
$f(t)$		□		□

$t=3$ 時 $f(t)$有最大值，$\therefore t_0=3$。

(C) **20.** 設 $f(x)=x^3-3x^2-24x+32$ 在閉區間$[-3, 3]$內的最大值與最小值分別為 m、n，則 $m-n=$？ (A) 90 (B) 98 (C) 100 (D) 108。 【109 數 C 統測】

SOL: **20.** $f'(x)=3x^2-6x-24=3(x+2)(x-4)$，

x	-3		-2		3
$f'(x)$		+		−	
$f(x)$	50	□	60	□	−40

$\therefore m=60$，$n=-40 \Rightarrow m-n=100$。