4-1 數列的極限

(B) **1.** 關於下列各極限，何者正確？ (A) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-2^n}{5^n}=1$ (B) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{100n+9}{n^2+5n-1}=0$ (C) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{0.01n}{5n-1}=0$ (D) $\lim\limits_{n\to\infty}n-\sqrt{n^2-1}=1$ 。 【99 數 C 統測】

SOL.**1.**(A)所求 $\lim\limits_{n\to\infty}[(\frac{3}{5})^n-(\frac{2}{5})^n]=0-0=0$ 。

(B)所求= 0。

(C)所求 $=\dfrac{0.01}{5}\neq 0$ 。

(D)所求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-\sqrt{n^2-1})(n+\sqrt{n^2-1})}{n+\sqrt{n^2-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-(\sqrt{n^2-1})^2}{n+\sqrt{n^2-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+\sqrt{n^2-1}}=0$ 。

(A) **2.** 無窮級數 $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^3}+\dfrac{1}{2^4}+\dfrac{1}{3^5}+\cdots+\dfrac{1}{2^{2k}}+\dfrac{1}{3^{2k+1}}+\cdots=$ ？

(A) $\dfrac{41}{24}$ (B) $\dfrac{59}{24}$ (C) $\dfrac{5}{2}$ (D) $\dfrac{7}{2}$ 。 【99 數 C 統測】

SOL.**2.**所求 $=(1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^4}+\cdots+\dfrac{1}{2^{2k}}+\cdots)+(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^3}+\cdots+\dfrac{1}{3^{2k+1}}+\cdots)=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2^2}}+\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3^2}}=\dfrac{4}{3}+\dfrac{3}{8}=\dfrac{41}{24}$ 。

(C) **3.** 若無窮等比級數 $(0.4)+(0.4)^2+(0.4)^3+\ldots+(0.4)^n+\ldots$ 的和為 a，無窮等比級數 $(0.2)+(0.2)^2+(0.2)^3+\ldots+(0.2)^n+\ldots$ 的和為 b，則 $\dfrac{a}{b}=$ ？

(A) $\dfrac{4}{3}$ (B) 2 (C) $\dfrac{8}{3}$ (D) 4。 【100 數 C 統測】

SOL.**3.** $a=\dfrac{0.4}{1-0.4}=\dfrac{2}{3}$，$b=\dfrac{0.2}{1-0.2}=\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{1}=\dfrac{8}{3}$ 。

(D) **4.** 試求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{2n^2+1}{n}-\dfrac{2n^2+n+2}{n+2})$ 之值=？ (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3。【105 數 C 統測】

SOL.**4.**所求 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n^2+1)(n+2)-(2n^2+n+2)n}{n(n+2)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n^3+4n^2+n+2)-(2n^3+n^2+2n)}{n^2+2n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-n+2}{n^2+2n}=\dfrac{3}{1}=3$ 。

(A) **5.** 計算 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})=$? (A) $\frac{3}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{8}$ 。 【108 數 C 統測】

SOL.**5.** $\sum_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})=(1+\frac{1}{n})+(1+\frac{2}{n})+(1+\frac{3}{n})+\cdots+(1+\frac{n}{n})=n\times1+\frac{1+2+3+\cdots+n}{n}=n+\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n}$

$=n+\frac{n+1}{2}=\frac{3n+1}{2}$，

所求 $=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\times\frac{3n+1}{2})=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n}=\frac{3}{2}$ 。

4-2 多項式函數的積分

(CD) **6.** 設 $f(x)$在$[a,b]$上為一連續函數，其中 $a<b$，則下列敘述哪些錯誤？

(A) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

(B) $\int_a^b k\,f(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ ，其中 k 為任意常數

(C)若 $a<b<c$，則 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

(D) $\int_a^b x^n dx=\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$ ，其中 n 為任意常數。 【99 數 C 統測】

SOL. **6.** (C)要 $a<c<b$ 才成立。 (D)要 $n\neq-1$ 才成立。

(A) **7.**設 $f(x)=\sqrt{2x-1}$ ，且 $f''(x)$ 為 $f(x)$的二階導函數，則 $\int_1^5 f''(x)dx=$?

(A) $\frac{-2}{3}$ (B) $\frac{-1}{3}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{2}{3}$ 。 【100 數 C 統測】

SOL. **7.** $f(x)=\sqrt{2x-1}=(2x-1)^{\frac{1}{2}}$， $f'(x)=\frac{1}{2}(2x-1)^{-\frac{1}{2}}\times2=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$，

$\int_1^5 f''(x)dx=f'(x)\Big|_1^5=f'(5)-f'(1)=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$ 。

(A) **8.** 若函數 $f(x)$的導函數為 $f'(x)=3x^2+6x$ 且 $f(1)=3$，則 $\int_0^2 f(x)dx$ 之值為何？

(A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 20。 【101 數 C 統測】

SOL.**8.** $f'(x)=3x^2+6x\Rightarrow f(x)=x^3+3x^2+c$， $f(1)=3\Rightarrow4+c=3\Rightarrow c=-1$，

$\therefore f(x)=x^3+3x^2-1$，

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(x^3+3x^2-1)dx=(\frac{1}{4}x^4+x^3-x)\Big|_0^2=(4+8-2)-(0+0-0)=10$ 。

(D) ***9.*** 求$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3})dx=$？ (A)$\frac{97}{36}$ (B)$\frac{49}{18}$ (C)$\frac{17}{6}$ (D)$\frac{26}{9}$。【102 數 C 統測】

SOL.***9.*** $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3})dx=(x+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{9})\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}=(\frac{3}{2}+\frac{9}{16}+\frac{27}{72})-(-\frac{1}{2}+\frac{1}{16}-\frac{1}{72})=\frac{26}{9}$。

(B) ***10.*** 設 $f(x)=2x^2-3$，$g(x)=3-x^2$，則定積分$\int_{-3}^{3}[f(x)-g(x)]dx$之值為何？

(A) 0 (B) 18 (C) 42 (D) 54。【103 數 C 統測】

SOL.***10.*** $f(x)-g(x)=(2x^2-3)-(3-x^2)=3x^2-6$，

所求$=\int_{-3}^{3}(3x^2-6)dx=(x^3-6x)\Big|_{-3}^{3}=(27-18)-(-27+18)=18$。

(A) ***11.*** 求$\int_{-3}^{3}(1-2x)(1+2x)dx=$？ (A) -66 (B) -33 (C) 33 (D) 66。【104 數 C 統測】

SOL.***11.***所求$=\int_{-3}^{3}(1-4x^2)dx=(x-\frac{4}{3}x^3)\Big|_{-3}^{3}=(3-36)-(-3+36)=-66$。

(B) ***12.*** 試求定積分$\int_{-1}^{3}|2x-1|\,dx$之值？ (A)$\frac{15}{2}$ (B)$\frac{17}{2}$ (C)$\frac{19}{2}$ (D)$\frac{21}{2}$。【105 數 C 統測】

SOL.***12.*** 所求$=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}|2x-1|\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{3}|2x-1|\,dx=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(1-2x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{3}(2x-1)dx=(x-x^2)\Big|_{-1}^{\frac{1}{2}}+(x^2-x)\Big|_{\frac{1}{2}}^{3}$

$=(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})-(-1-1)+(9-3)-(\frac{1}{4}-\frac{1}{2})=\frac{17}{2}$。

(B) ***13.*** 設 $f(x)$為多項式函數，若$\int_{1}^{3}f(x)dx=1$、$\int_{2}^{5}f(x)dx=4$且$\int_{2}^{3}f(x)dx=2$，

則$\int_{1}^{5}f(x)dx=$？ (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7。【106 數 C 統測】

SOL.***13.*** $\int_{1}^{3}f(x)dx=\int_{1}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{3}f(x)dx\Rightarrow 1=\int_{1}^{2}f(x)dx+2\Rightarrow\int_{1}^{2}f(x)dx=-1$，

$\int_{1}^{5}f(x)dx=\int_{1}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{5}f(x)dx=-1+4=3$。

(A) ***14.*** $\int_{-4}^{0}|2x+5|\,dx=$？ (A)$\frac{17}{2}$ (B) 8 (C)$\frac{17}{4}$ (D) 4。【107 數 C 統測】

Sol.***14.*** $\int_{-4}^{0}|2x+5|\,dx=\int_{-4}^{-\frac{5}{2}}|2x+5|\,dx+\int_{-\frac{5}{2}}^{0}|2x+5|\,dx=\int_{-4}^{-\frac{5}{2}}(-2x-5)dx+\int_{-\frac{5}{2}}^{0}(2x+5)dx$

$=(-x^2-5x)\Big|_{-4}^{-\frac{5}{2}}+(x^2+5x)\Big|_{-\frac{5}{2}}^{0}=(-\frac{25}{4}+\frac{25}{2})-(-16+20)+(0+0)-(\frac{25}{4}-\frac{25}{2})=\frac{17}{2}$。

(D) ***15.*** 已知 $F(x)=\dfrac{d}{dx}[\int_1^x (t^2+1)dt]$，則 $F(1)=$？

(A) -1　(B) 0　(C) 1　(D) 2。　　【108 數 C 統測】

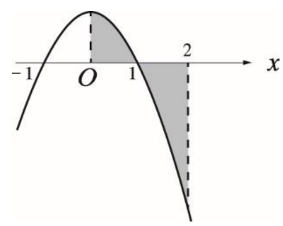
Sol.***15.*** $\int_1^x (t^2+1)dt=(\frac{1}{3}t^3+t)\Big|_1^x=\frac{1}{3}x^3+x-\frac{4}{3}$　　$F(x)=\frac{d}{dx}(\frac{1}{3}x^3+x-\frac{4}{3})=x^2+1$

$F(1)=1+1=2$。

4-3 積分的應用

(D) ***16.*** 函數 $f(x)=1-x^2$ 的圖形與 x 軸在區間[0, 2]所圍區域面積為何？

(A) $-\frac{2}{3}$　(B) $\frac{2}{3}$　(C) $\frac{4}{3}$　(D) 2。　　【98 數 C 統測】

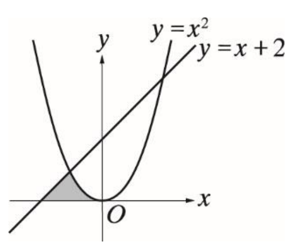


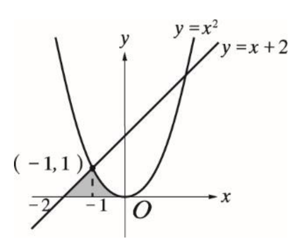
Sol. ***16.*** $f(x)=1-x^2=-(x^2-1)=-(x+1)(x-1)$，

所求 $=\int_0^1(1-x^2)dx-\int_1^2(1-x^2)dx=(x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^1-(x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_1^2$　$=[(1-\frac{1}{3})-(0-0)]-[(2-\frac{8}{3})-(1-\frac{1}{3})]$

$=\frac{2}{3}-(-\frac{4}{3})=2$。

(B) ***17.***求如圖所示，陰影部分之面積為何？ (A) $\frac{2}{3}$　(B) $\frac{5}{6}$　(C) 1　(D) $\frac{4}{3}$。【100 數 C 統測】

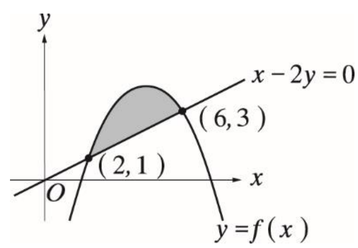




SOL. 17. $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x+2 \end{cases} \Rightarrow x^2=x+2 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow x=2$ 或-1，

所求 $=\frac{1}{2}\times1\times1+\int_{-1}^{0}x^2dx$　$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{0}$　$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$。

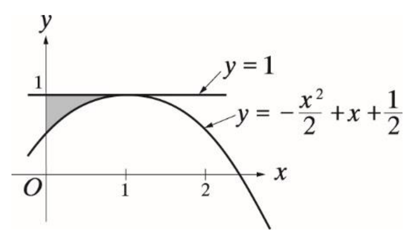
(　C　) ***18.*** 已知 $y = f(x)$與 $x - 2y = 0$ 相交於(2, 1)、(6, 3)兩點，如圖所示。若陰影部分的面積為 $\frac{16}{3}$ 且 $\int_0^2 f(x)dx = \frac{-13}{3}$，則 $\int_0^6 f(x)dx = ?$ (A) 7　(B) 8　(C) 9　(D) 10。【102 數 C 統測】



SOL. 18. $\int_2^6 [f(x) - \frac{1}{2}x]dx = \frac{16}{3} \Rightarrow \int_2^6 f(x) - \int_2^6 \frac{1}{2}xdx = \frac{16}{3} \Rightarrow \int_2^6 f(x) = \frac{16}{3} + \int_2^6 \frac{1}{2}xdx = \frac{16}{3} + \frac{1}{4}x^2\Big|_2^6 = \frac{16}{3} + 8 = \frac{40}{3}$，

$\int_0^6 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^6 f(x)dx = -\frac{13}{3} + \frac{40}{3} = 9$。

(　D　) ***19.*** 由 $y = -\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$，$y = 1$ 和 $x = 0$ 所圍成的區域，如圖所示陰影部分，則此區域面積可由下列何式求得？ (A) $\int_0^1 (-\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2})dx$　(B) $\int_0^1 (\frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2})dx$　(C) $\int_0^1 (-\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2})dx$　(D) $\int_0^1 (\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2})dx$。　【104 數 C 統測】



Sol. 19. 所求 $= \int_0^1 [1 - (-\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2})]dx = \int_0^1 (\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2})dx$。

(　D　) ***20.*** 設 $g(x) = 2x - 1$，已知在閉區間[–1, 1]上 $f(x) \geq 1$ 且 $\int_{-1}^1 f(x)dx = 5$，則此兩曲線 $y = f(x)$與 $y = g(x)$在閉區間[–1, 1]所圍成區域的面積為何？

(A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 7。　【109 數 C 統測】

Sol. ***20.*** $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2x \leq 2 \Rightarrow -3 \leq 2x - 1 \leq 1$，$\therefore -1 \leq x \leq 1$ 時，

$-3 \leq g(x) \leq 1$，$f(x) \geq 1 \geq g(x)$，可知 $f(x)$的圖形在 $g(x)$的上方，

所求 $= \int_{-1}^1 [f(x) - g(x)]dx = \int_{-1}^1 f(x)dx - \int_{-1}^1 g(x)dx$，

又 $\int_{-1}^1 g(x)dx = \int_{-1}^1 (2x - 1)dx = (x^2 - x)\Big|_{-1}^1 = -2$，

$\therefore$所求 $= 5 - (-2) = 7$。