

1

二元一次不等式與線性規劃

1-1 二元一次不等式

基礎題

1. 下列敘述正確的打「○」，錯誤的打「×」：

(○) (1) 數對 $(0, 0)$ 是不等式 $x + y + 1 > 0$ 的一解。 $0+0+1>0$ ✓

(○) (2) 不等式 $2x - y > 0$ 的圖形不包含原點。 $(\frac{1}{2}, 0)$ ✓

(○) (3) 不等式 $2x - y > 0$ 的圖形為包含點 $(1, 0)$ 的半平面。 $2-0>0$ ✓

(○) (4) 點 $A(1, 2)$ 與點 $B(0, 2)$ 兩點分別在直線 $L: 2x - y + 1 = 0$ 的異側。

(○) (5) 聯立不等式 $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$ 的圖解就是坐標平面上的第一象限。 $\begin{matrix} (-,+) & (+,+) \\ (-,-) & (+,-) \end{matrix}$ ✓

(4) $(2-2+1)(0-2+1) < 0$
 $-1 < 0$ ✓

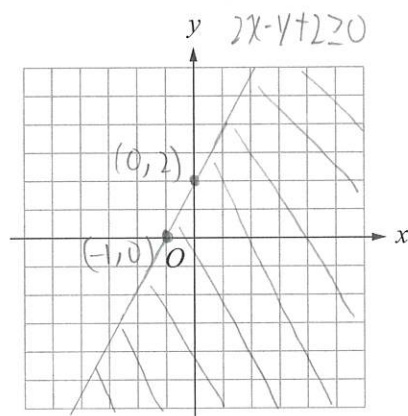
2. 圖示二元一次不等式 $2x - y + 2 \geq 0$ 的解區域。

【例題 1】

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & -1 \\ \hline y & 2 & 0 \end{array}$$

$(0, 2)$

$(-1, 0)$



4 第1章 二元一次不等式與線性規劃

3. 圖示二元一次不等式 $-2x+6 \geq 0$ 的解區域。

$$2x-6 \leq 0$$

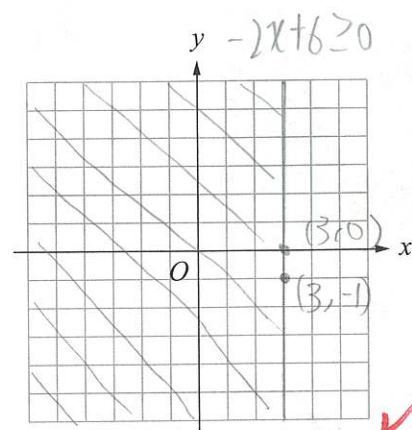
【例題 2】

$$x \leq 3$$

$$\begin{array}{c|c|c} x & 3 & 3 \\ \hline y & 0 & -1 \end{array}$$

$$(3, 0)$$

$$(3, -1)$$



4. 若平面上的兩點 $A(2, 1)$ 、 $B(1, 2)$ 分別在直線 $L: 2x-3y+k=0$ 的異側，試求 k 的範圍。

【例題 3】

$$(4-3+k)(2-6+k) < 0$$

$$(k+1)(k-4) < 0$$

$$-1 < k < 4$$

$$-1 < k < 4$$

5. 圖示二元一次聯立不等式 $\begin{cases} 2x-3y+6 > 0 \\ x+y-2 \geq 0 \end{cases}$

的解區域。

【例題 4】

$$\begin{cases} 2x-3y = -6 \\ x+y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & -3 \\ \hline y & 2 & 0 \end{array}$$

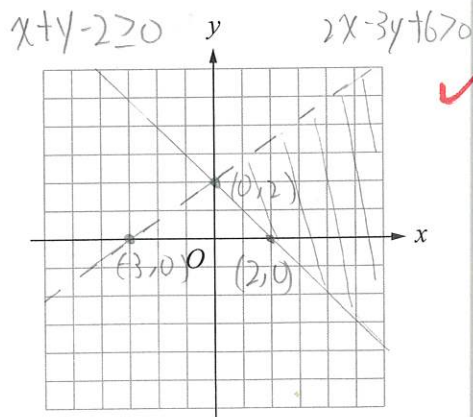
$$\begin{cases} 2x-3y = -6 \\ 2x+y = 4 \end{cases}$$

$$-5y = -10$$

$$y = 2$$

$$x = 0$$

$$(0, 2)$$

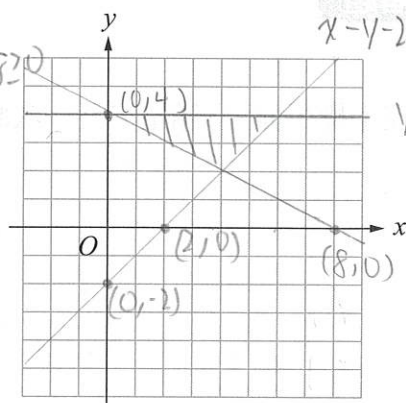


6. 圖示二元一次聯立不等式 $\begin{cases} x+2y-8 \geq 0 \\ x-y-2 \leq 0 \\ y-4 \leq 0 \end{cases}$

的解區域。

【例題5】

$$\begin{cases} x & y & z & r \\ \hline x & y & z & r \\ \hline x & y & z & r \\ \hline x & y & z & r \\ \hline x & y & z & r \\ \hline \end{cases}$$

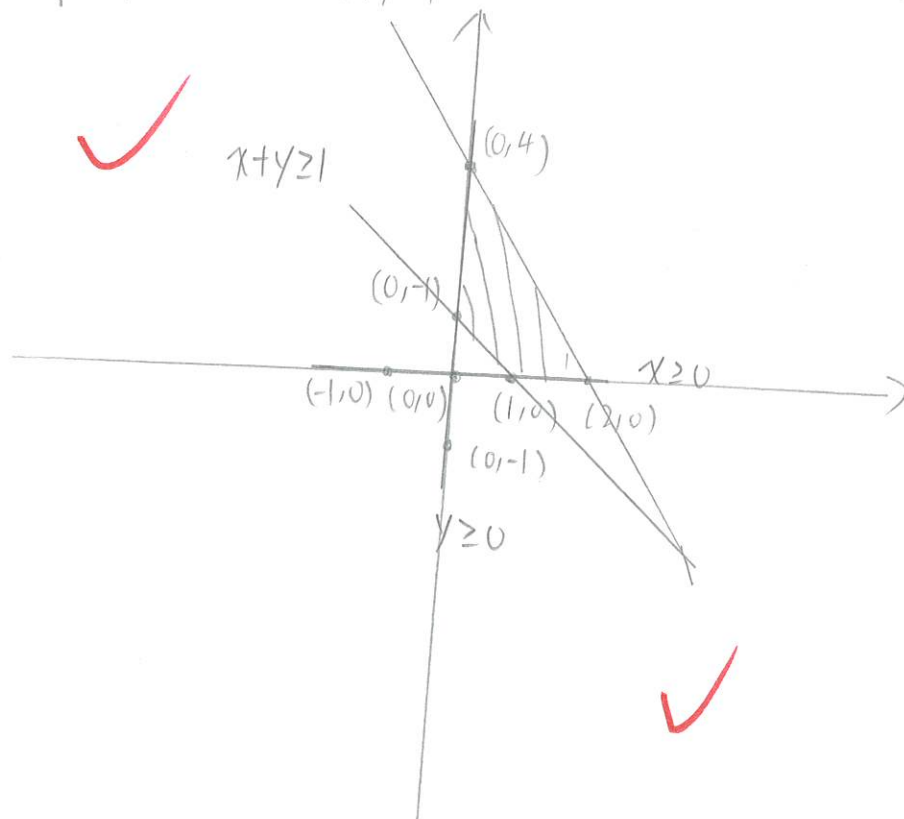


進階題

7. 在坐標平面上，滿足二元一次聯立不等式 $\begin{cases} x+y \geq 1 \\ 2x+y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ 的整數解 (x, y) 共有幾個？

{	$\begin{array}{c c c} x & 0 & 1 \\ \hline y & 1 & 0 \end{array}$	$x=0$	$x=1$	$x=2$
		$(0, 1)$	$(1, 0)$	$(2, 0)$
	$\begin{array}{c c c} x & 0 & 2 \\ \hline y & 4 & 0 \end{array}$	$(0, 2)$	$(1, 1)$	
	$\begin{array}{c c c} x & 0 & 0 \\ \hline y & 0 & -1 \end{array}$	$(0, 3)$	$(1, 2)$	
	$\begin{array}{c c c} x & 0 & -1 \\ \hline y & 0 & 0 \end{array}$	$(0, 4)$		

816



1

二元一次不等式與線性規劃

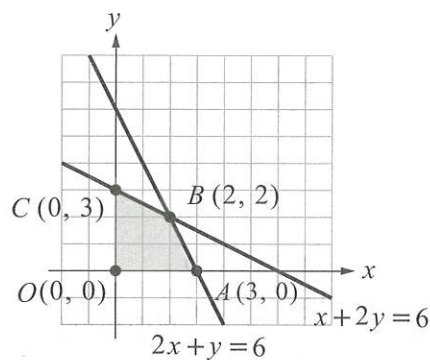
1-2 線性規劃

基礎題

1. 下列敘述正確的打「○」，錯誤的打「×」：

設一線性規劃的可行解區域為由
$$\begin{cases} x+2y \leq 6 \\ 2x+y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

的圖解所形成之四邊形 $OABC$ 內部及邊界。



- ☒ (X) (1) 目標函數 $x-y$ 的最小值，發生在 ~~X~~ 點。
☒ (○) (2) 目標函數 $x+2y$ 的最大值，發生在 B 點。
☒ (○) (3) 目標函數 $x+2y$ 的最大值，發生在 C 點。
☒ (○) (4) 目標函數 $x+3y$ 的最大值，發生在 C 點。
☒ (○) (5) 目標函數 $3x+y$ 的最大值，發生在 A 點。

(1)

$O, 0-0$	$A, 3-0$	$B, 2-2$	$C, 0-3$
$=0$	$=3$	$=0$	$=-3$
			小 ✓

(2)(3)

$O, 0+2 \times 0$	$A, 3+2 \times 0$	$B, 2+2 \times 2$	$C, 0+2 \times 3$
$=0$	$=3$	$=6$	$=6$
		大 ✓	大 ✓

(4)

$O, 0+3 \times 0$	$A, 3+3 \times 0$	$B, 2+3 \times 2$	$C, 0+3 \times 3$
$=0$	$=3$	$=8$	$=9$
			大 ✓

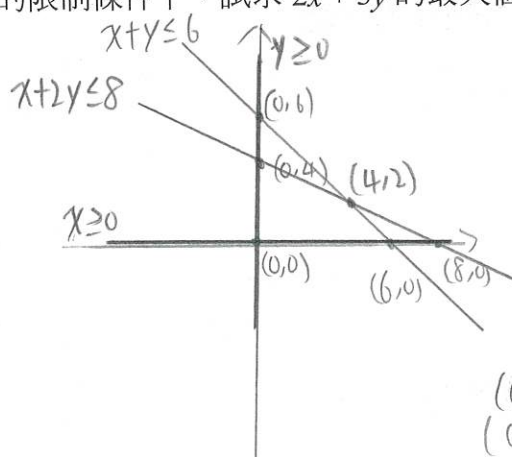
(5)

$O, 3 \times 0 + 0$	$A, 3 \times 3 + 0$	$B, 3 \times 2 + 2$	$C, 3 \times 0 + 3$
$=0$	$=9$	$=8$	$=3$
	大 ✓		

2. 在 $\begin{cases} x+y \leq 6 \\ x+2y \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ 的限制條件下，試求 $2x+3y$ 的最大值。

【例題 1】

$$\begin{cases} x & y & b \\ \hline x & 0 & 6 \\ y & 6 & 0 \\ \hline x & 0 & 8 \\ y & 4 & 0 \\ \hline x & \geq 0 \\ y & \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x+y=6 \\ x+2y=8 \end{cases}$$

$$-y=-2$$

$$y=2$$

$$x=4$$

$$(4,2)$$

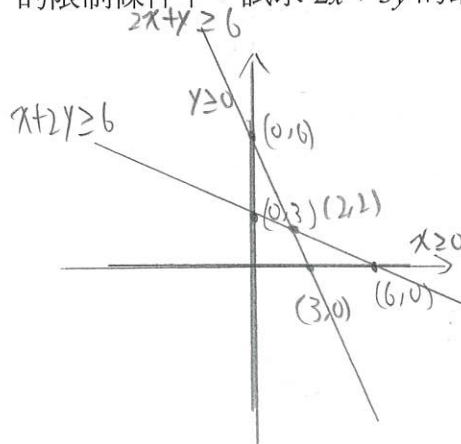
$$\begin{aligned} (0,0) & 0+0=0 \\ (0,4) & 0+12=12 \\ (6,0) & 12+0=12 \\ (4,2) & 8+6=14 \end{aligned}$$

$A=14$

3. 在 $\begin{cases} x+2y \geq 6 \\ 2x+y \geq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ 的限制條件下，試求 $2x+3y$ 的最小值。

【隨堂 P18】

$$\begin{cases} x & y & b \\ \hline x & 0 & 6 \\ y & 3 & 0 \\ \hline x & 0 & 3 \\ y & 6 & 0 \\ \hline x & \geq 0 \\ y & \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x+2y=6 \\ 2x+y=6 \end{cases}$$

$$2x+4y=12$$

$$2x+y=6$$

$$3y=6$$

$$y=2$$

$$x+4=6$$

$$x=2$$

$$(2,2)$$

$$\begin{aligned} (0,3) & 0+18=18 \\ (6,0) & 12+0=12 \\ (2,2) & 4+6=10 \end{aligned}$$

$A=10$

4. 某化工廠用兩種不同原料均可生產同一產品，若採用甲種原料，每噸成本 1000 元，運費 500 元，可得產品 90 公斤；若採用乙種原料，每噸成本 1500 元，運費 400 元，可得產品 100 公斤。今每日規劃為：原料成本總共不得超過 6000 元，運費不得超過 2000 元，試問此工廠每日最多可生產此產品多少公斤？

設 甲 = x

乙 = y

$$\begin{cases} 1000x + 1500y \leq 6000 & x \geq 0 \\ 500x + 400y \leq 2000 & y \geq 0 \end{cases}$$

【例題 2】

$$\begin{cases} 10x + 15y = 60 \\ 5x + 4y = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x + 15y = 60 \\ 10x + 8y = 40 \end{cases}$$

$$7y = 20$$

$$y = \frac{20}{7}$$

$$5x + \frac{80}{7} = 20$$

$$5x = 19\frac{1}{7} - 11\frac{3}{7}$$

$$5x = 8\frac{4}{7}$$

$$5x = \frac{60}{7}$$

$$x = \frac{60}{7} \times \frac{1}{5}$$

$$= \frac{12}{7}$$

$$\left(\frac{12}{7}, \frac{20}{7}\right)$$

$$\begin{aligned} & 90x + 100y \\ &= 90 \times \frac{12}{7} + 100 \times \frac{20}{7} \\ &= \frac{1080}{7} + \frac{2000}{7} \\ &= \frac{3080}{7} \\ &= 440 \text{ 公斤} \end{aligned}$$

欠圓形

進階題

5. 為預防禽流感，營養師吩咐雞場主人每天必須從飼料中提供至少 84 單位的營養素 A，至少 72 單位的營養素 B 和至少 60 單位的營養素 C 給他的雞群。這三種營養素可由兩種飼料中獲得，且知第一種飼料每公斤售價 5 元並含有 7 單位的營養素 A，3 單位的營養素 B 與 3 單位的營養素 C；第二種飼料每公斤售價 4 元並含有 2 單位的營養素 A，6 單位的營養素 B 與 2 單位的營養素 C。

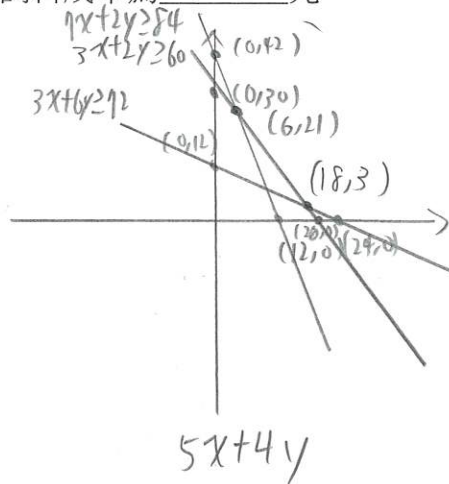
(1) 若雞場主人每天使用 x 公斤的第一種飼料，與 y 公斤的第二種飼料就能符合營養師吩咐，則除了 $x \geq 0$ ， $y \geq 0$ 兩個條件外，試寫出 x, y 必須滿足的不等式

$$\begin{cases} 7x+2y \geq 84 \\ x+2y \geq 24 \\ 3x+2y \geq 60 \end{cases} \quad \begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix}$$

(2) 若雞場主人想以最少的飼料成本來達到雞群的營養要求，則數對

$(x, y) = (18, 3)$ ，且最少的飼料成本為 102 元。

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{cases} 7x+2y \geq 84 \\ x+2y \geq 24 \\ 3x+6y \geq 72 \\ 3x+2y \geq 60 \end{cases} \quad \begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix} \\ (2) \quad & \begin{cases} \frac{x}{18} + \frac{y}{12} = 1 \\ \frac{x}{12} + \frac{y}{6} = 1 \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1 \end{cases} \end{aligned}$$



$$\begin{cases} 7x+2y=84 \\ 3x+2y=60 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 4x &= 24 \\ x &= 6 \\ 18+2y &= 60 \\ 2y &= 42 \\ y &= 21 \\ (6, 21) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 3x+2y=60 \\ 3x+6y=72 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -4y &= -12 \\ y &= 3 \\ 3x+6 &= 60 \\ 3x &= 54 \\ x &= 18 \\ (18, 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x+4y &= 90+12 & 30+84 \\ &= 102 & = 112 \\ & (18, 3) & (6, 21) \end{aligned}$$

90



1

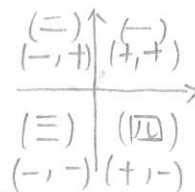
二元一次不等式與線性規劃



自我評量

(B) 1. 二元一次聯立不等式 $\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$ 的圖解，為坐標平面上的第幾象限？

(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限。



(C) 2. 下列哪一個點坐標位於二元一次不等式 $2x - y > 1$ 的解區域？

(A) (0, 0) (B) (0, 1) (C) (1, 0) (D) (-1, 1)。

(A) $2 \times 0 - 1 \times 0 < 1$ (B) $2 \times 0 - 1 \times 1 < 1$

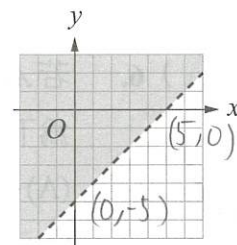
(C) $2 \times 1 - 1 \times 0 > 1$ (D) $2 \times (-1) - 1 \times 1 < 1$

(C) 3. 圖為下列哪一個二元一次不等式的圖形？

(A) $x + y < 5$ (B) $x + y \leq 5$
(C) $x - y < 5$ (D) $x - y \leq 5$ 。

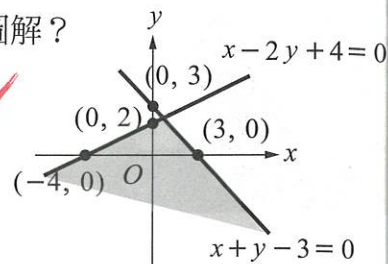
(A) $\begin{array}{r|l|l} x & 0 & 5 \\ y & 5 & 0 \end{array}$ (B) $\begin{array}{r|l|l} x & 0 & 5 \\ y & 1 & 5 \end{array}$

(C) $\begin{array}{r|l|l} x & 0 & 5 \\ y & 1 & -5 \end{array}$ (D) $\begin{array}{r|l|l} x & 0 & 5 \\ y & -1 & -5 \end{array}$



(B) 4. 圖為下列哪一組二元一次聯立不等式的圖解？

- (A) $\begin{cases} x+y-3 \geq 0 \\ x-2y+4 \geq 0 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x+y-3 \leq 0 \\ x-2y+4 \geq 0 \end{cases}$ ✓
 (C) $\begin{cases} x+y-3 \leq 0 \\ x-2y+4 \leq 0 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x+y-3 \geq 0 \\ x-2y+4 \leq 0 \end{cases}$

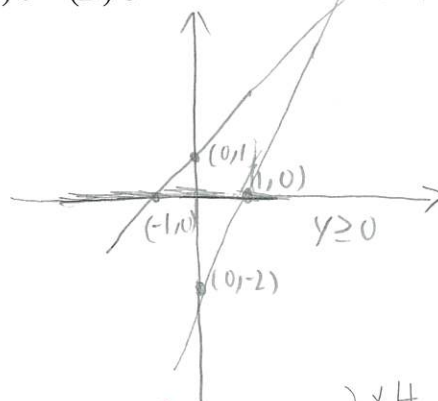


(B) 5. 在坐標平面上，二元一次聯立不等式 $\begin{cases} 2x-y \leq 2 \\ x-y \geq -1 \\ y \geq 0 \end{cases}$ 所圍成區域的面積為

多少平方單位？

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6。

$$\begin{cases} x & | & 0 & | & 1 \\ y & | & -2 & | & 0 \\ \hline x & | & 0 & | & -1 \\ y & | & 1 & | & 0 \\ \hline y & \geq & 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 2x-y \leq 2 \\ x-y \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y=2 \\ 2x-2y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=4 \\ 2x-4=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=4 \\ 2x=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=4 \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow (3, 4)$$

$$\frac{2 \times 4}{2} = 4 \text{ 平方單位}$$

(A) 6. 若 $A(-1, 4)$ 與 $B(5, -2)$ 兩點位在直線 $L: 3x + y + k = 0$ 的異側，則 k 可為下列哪一個值？

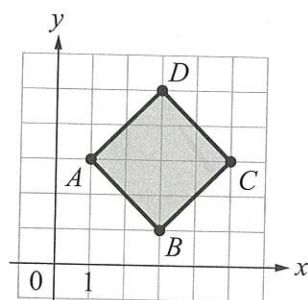
- (A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2。

$$(-3+4+k)(15-2+k) < 0$$

$$(k+1)(k+13) < 0$$

$$-13 < k < -1$$

設一線性規劃的可行解區域為如圖所示的正方形及其內部，根據此圖形回答 7.~12. 題：



(C) 7. 目標函數 $3x + y$ 的最大值發生在下列哪一點上？

(A) A (B) B (C) C (D) D。

(A) $A(1,3)$ $3+3=6$ 小
(B) $B(3,1)$ $9+1=10$
(C) $C(5,3)$ $15+3=18$ 大
(D) $D(3,5)$ $9+5=14$

(A) 8. 目標函數 $3x + y$ 的最小值發生在下列哪一點上？

(A) A (B) B (C) C (D) D。



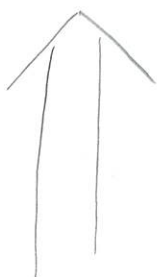
(D) 9. 目標函數 $x + 3y$ 的最大值發生在下列哪一點上？

(A) A (B) B (C) C (D) D。

(A) $A(1,3)$ $1+9=10$
(B) $B(3,1)$ $3+3=6$ 小
(C) $C(5,3)$ $5+9=14$
(D) $D(3,5)$ $3+15=18$ 大

(B) 10. 目標函數 $x + 3y$ 的最小值發生在下列哪一點上？

(A) A (B) B (C) C (D) D。



(A) 11. 目標函數 $-2x + y$ 的最大值發生在下列哪一點上？

(A) A (B) B (C) C (D) D。

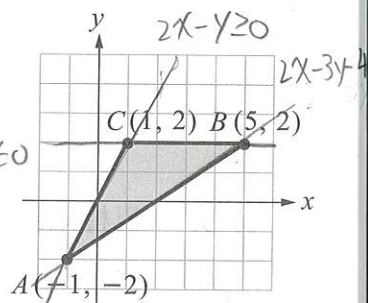
✓ (A) $A(1, 3)$ (B) $B(3, 1)$ (C) $C(5, 3)$ (D) $D(3, 5)$
 $-2+3=1$ $-6+1=-5$ $-10+3=-7$ $-6+5=-1$
 大 小

(C) 12. 目標函數 $-2x + y$ 的最小值發生在下列哪一點上？

(A) A (B) B (C) C (D) D。

(D) 13. 如圖所示，三角形其三邊之直線方程式分別為 $y - 2 = 0$, $2x - y = 0$, $2x - 3y - 4 = 0$ ，則三角形內部區域及邊界可用下列哪一組不等式表示？

- (A) $\begin{cases} 2x - y \geq 0 \\ 2x - 3y - 4 \geq 0 \\ y - 2 \leq 0 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 2x - y \leq 0 \\ 2x - 3y - 4 \geq 0 \\ y - 2 \leq 0 \end{cases}$
 (C) $\begin{cases} 2x - y \leq 0 \\ 2x - 3y - 4 \leq 0 \\ y - 2 \leq 0 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 2x - y \geq 0 \\ 2x - 3y - 4 \leq 0 \\ y - 2 \leq 0 \end{cases}$



$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2x - 3y = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & y & z & w \\ y & 1 & 2 & -2 \\ x & -1 & 5 \\ y & -2 & 2 \\ y & = & 2 \end{cases}$$

100

