

2-2 橢圓的圖形與標準式

1. 方程式為 $\sqrt{x^2 + (y-3)^2} + \sqrt{x^2 + (y+3)^2} = 10$ 的橢圓，試求其
- (1) 焦點坐標 (2) 長軸長 (3) 短軸長

解

2. 已知橢圓的兩焦點為 $(2,0)$ 、 $(-2,0)$ ，長軸頂點為 $(3,0)$ 、 $(-3,0)$ ，試求其方程式。

解

3. 試求橢圓 $4x^2 + 9y^2 = 36$ 的

(1) 焦點坐標

(2) 頂點坐標

(3) 正焦弦長

解

4. 試求橢圓 $4x^2 + y^2 = 4$ 的

(1) 焦點坐標

(2) 頂點坐標

解

5. 已知橢圓中心在 $(2, -3)$ ，長軸平行 x 軸且長為 12，短軸長為 8，試求其方程式。

解

6. 將橢圓方程式 $3x^2 + 2y^2 + 12x + 4y + 8 = 0$ 化成標準式，並求其中心、焦點及長軸長。

解

7. 已知橢圓的長軸在 $x = 3$ 上，短軸在 $y = -1$ 上，且長軸長為 10，有一焦點為 $(3, 2)$ ，試求此橢圓的方程式。

解

2

二次曲線

2-3 雙曲線的圖形與標準式

1. 試求滿足方程式 $\left| \sqrt{(x-4)^2 + y^2} - \sqrt{(x+4)^2 + y^2} \right| = 4$ 的雙曲線之

(1) 焦點

(2) 標準式

解

2. 已知頂點為 $(0, 4)$ 、 $(0, -4)$ 且焦點為 $(0, 6)$ 、 $(0, -6)$ ，試求其雙曲線方程式。

解

3. 試求雙曲線 $x^2 - 9y^2 = 9$ 的

- (1) 焦點 (2) 頂點 (3) 漸近線方程式 (4) 正焦弦長

解

4. 試求雙曲線 $-\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{25} = 1$ 的

- (1) 焦點 (2) 頂點 (3) 漸近線方程式

解

5. 已知雙曲線的兩焦點 $(5,2)$ 、 $(-1,2)$ ，實軸長 $2\sqrt{5}$ ，試求其方程式。

解

6. 將雙曲線方程式 $4x^2 - y^2 - 8x - 2y - 1 = 0$ 化成標準式，並求其中心、焦點、頂點及實軸長。

解

7. 一雙曲線的兩漸近線為 $4x - 3y = 0$ 與 $4x + 3y = 0$ ，且通過點 $(3\sqrt{2}, 4)$ ，求其方程式。

解

2-2 橢圓的圖形與標準式

1. 方程式為 $\sqrt{x^2 + (y-3)^2} + \sqrt{x^2 + (y+3)^2} = 10$ 的橢圓，試求其

(1) 焦點坐標

(2) 長軸長

(3) 短軸長

《解》設 $F_1(0, 3)$ 、 $F_2(0, -3)$ ，則原式表示 $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 10$ 的動點 $P(x, y)$ 所成的橢圓，故得

(1) 焦點坐標為 $F_1(0, 3)$ 、 $F_2(0, -3)$

(2) 長軸長 $2a = 10$

(3) 因為 $a = 5$ ， $c = 3$

所以 $b^2 = a^2 - c^2 = 16$ ，即 $b = 4$

故短軸長 $2b = 8$

2. 已知橢圓的兩焦點為 $(2, 0)$ 、 $(-2, 0)$ ，長軸頂點為 $(3, 0)$ 、 $(-3, 0)$ ，試求其方程式。

《解》因為焦點為 $(2, 0)$ 、 $(-2, 0)$ 在 x 軸上，所以中心在 $(0, 0)$ ，

且 $c = 2$ ，又長軸頂點為 $(3, 0)$ 、 $(-3, 0)$ ，所以 $a = 3$

由 $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$ ，即 $b = \sqrt{5}$

故方程式為 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

3. 試求橢圓 $4x^2 + 9y^2 = 36$ 的

(1) 焦點坐標

(2) 頂點坐標

(3) 正焦弦長

解 將 $4x^2 + 9y^2 = 36$ 化為 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

得 $a^2 = 9$, $b^2 = 4$, $c^2 = a^2 - b^2 = 5$

即 $a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{5}$, 又中心在原點且焦點在 x 軸上, 故

(1) 焦點坐標為 $(\sqrt{5}, 0)$ 、 $(-\sqrt{5}, 0)$

(2) 長軸頂點為 $(3, 0)$ 、 $(-3, 0)$

短軸頂點為 $(0, 2)$ 、 $(0, -2)$

(3) 正焦弦長為 $\frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 4}{3} = \frac{8}{3}$

4. 試求橢圓 $4x^2 + y^2 = 4$ 的

(1) 焦點坐標

(2) 頂點坐標

解 將 $4x^2 + y^2 = 4$ 化為 $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$

得 $a^2 = 4$, $b^2 = 1$, $c^2 = a^2 - b^2 = 3$

即 $a = 2$, $b = 1$, $c = \sqrt{3}$, 又中心在原點, 故

(1) 焦點坐標為 $(0, \sqrt{3})$ 、 $(0, -\sqrt{3})$

(2) 長軸頂點為 $(0, 2)$ 、 $(0, -2)$

短軸頂點為 $(1, 0)$ 、 $(-1, 0)$

5. 已知橢圓中心在 $(2, -3)$, 長軸平行 x 軸且長為 12 , 短軸長為 8 , 試求其方程式。

解 依題意知: 中心 $(h, k) = (2, -3)$

長軸長 $2a = 12$, 即 $a = 6$

短軸長 $2b = 8$, 即 $b = 4$

又長軸平行 x 軸

故得方程式為 $\frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$

6. 將橢圓方程式 $3x^2 + 2y^2 + 12x + 4y + 8 = 0$ 化成標準式，並求其中心、焦點及長軸長。

《解》將原方程式依 x 、 y 配方且移項得

$$3(x^2 + 4x + 4) + 2(y^2 + 2y + 1) = -8 + 12 + 2$$

$$\text{即 } 3(x+2)^2 + 2(y+1)^2 = 6$$

$$\text{兩邊同除以 } 6 \text{ 得 } \frac{(x+2)^2}{2} + \frac{(y+1)^2}{3} = 1$$

$$\text{故標準式為 } \frac{(x+2)^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{(y+1)^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$$

$$\text{將它與 } \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \text{ 比較}$$

$$\text{得 } a = \sqrt{3}, b = \sqrt{2}, h = -2, k = -1$$

$$\text{又 } c^2 = a^2 - b^2 = 1, \text{ 即 } c = 1$$

且知長軸平行 y 軸

$$\text{所以中心為 } (h, k) = (-2, -1)$$

$$\text{焦點為 } (h, k \pm c) = (-2, -1 \pm 1)$$

$$\text{即 } (-2, 0)、(-2, -2)$$

$$\text{長軸長為 } 2a = 2\sqrt{3}$$

7. 已知橢圓的長軸在 $x=3$ 上，短軸在 $y=-1$ 上，且長軸長為 10，有一焦點為 $(3, 2)$ ，試求此橢圓的方程式。

《解》長軸與短軸的交點 $(3, -1)$ 為橢圓的中心

$$\text{長軸長 } 2a = 10, \text{ 即 } a = 5$$

$$\text{有一焦點為 } (3, 2), \text{ 得 } c = 3$$

$$\text{可推得 } b^2 = a^2 - c^2 = 16$$

$$\text{故方程式為 } \frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{25} = 1$$

2-3 雙曲線的圖形與標準式

1. 試求滿足方程式 $\left| \sqrt{(x-4)^2 + y^2} - \sqrt{(x+4)^2 + y^2} \right| = 4$ 的雙曲線之

(1) 焦點

(2) 標準式

解 設 $F_1(4,0)$ 、 $F_2(-4,0)$

則原方程式表 $\left| \overline{PF_1} - \overline{PF_2} \right| = 4$ 的動點 $P(x,y)$ 所成的雙曲線，得

(1) 兩焦點為 $(4,0)$ 、 $(-4,0)$

(2) 中心為 $(0,0)$ 且 $c=4$

又 $2a=4$ ，即 $a=2$

推知 $b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 4 = 12$

故標準式為 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

2. 已知頂點為 $(0,4)$ 、 $(0,-4)$ 且焦點為 $(0,6)$ 、 $(0,-6)$ ，試求其雙曲線方程式。

解 依題意知：中心在 $(0,0)$ 且 $a=4$ ， $c=6$

得 $b^2 = c^2 - a^2 = 20$

故雙曲線方程式為 $-\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$

3. 試求雙曲線 $x^2 - 9y^2 = 9$ 的

(1) 焦點

(2) 頂點

(3) 漸近線方程式

(4) 正焦弦長

解 將 $x^2 - 9y^2 = 9$ 化為 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{1} = 1$

得 $a^2 = 9$, $b^2 = 1$, 則 $c^2 = a^2 + b^2 = 10$

即 $a = 3$, $b = 1$, $c = \sqrt{10}$, 又中心在原點且焦點在 x 軸上, 故

(1) 焦點為 $(\sqrt{10}, 0)$ 、 $(-\sqrt{10}, 0)$

(2) 頂點為 $(3, 0)$ 、 $(-3, 0)$

(3) 令 $x^2 - 9y^2 = 0$, 因式分解得 $(x+3y)(x-3y) = 0$

故漸近線方程式為 $x+3y=0$ 、 $x-3y=0$

(4) 正焦弦長為 $\frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 1}{3} = \frac{2}{3}$

4. 試求雙曲線 $-\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{25} = 1$ 的

(1) 焦點

(2) 頂點

(3) 漸近線方程式

解 由 $-\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{25} = 1$, 得 $a^2 = 25$, $b^2 = 144$

則 $c^2 = a^2 + b^2 = 169$, 即 $a = 5$, $b = 12$, $c = 13$, 又中心在原點, 故

(1) 焦點為 $(0, 13)$ 、 $(0, -13)$

(2) 頂點為 $(0, 5)$ 、 $(0, -5)$

(3) 令 $-\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{25} = 0$

整理得 $-25x^2 + 144y^2 = 0$

分解得 $(12y+5x)(12y-5x) = 0$

故漸近線方程式為 $12y+5x=0$ 、 $12y-5x=0$

5. 已知雙曲線的兩焦點 $(5,2)$ 、 $(-1,2)$ ，實軸長 $2\sqrt{5}$ ，試求其方程式。

【解】因為兩焦點 $(5,2)$ 、 $(-1,2)$ ，所以中心為 $(2,2)$ 且 $c=3$

實軸長 $2a=2\sqrt{5}$ ，即 $a=\sqrt{5}$

由 $b^2=c^2-a^2=4$ ，又實軸平行 x 軸

故方程式為 $\frac{(x-2)^2}{5}-\frac{(y-2)^2}{4}=1$

6. 將雙曲線方程式 $4x^2-y^2-8x-2y-1=0$ 化成標準式，並求其中心、焦點、頂點及實軸長。

【解】將原方程式依 x 、 y 配方且移項得 $4(x^2-2x+1)-(y^2+2y+1)=1+4-1$

即 $4(x-1)^2-(y+1)^2=4$

兩邊同除以4得 $\frac{(x-1)^2}{1}-\frac{(y+1)^2}{4}=1$

故標準式為 $\frac{(x-1)^2}{1^2}-\frac{(y+1)^2}{2^2}=1$

將它與 $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ 比較，得 $a=1$ ， $b=2$ ， $h=1$ ， $k=-1$

又 $c^2=a^2+b^2=5$ ，即 $c=\sqrt{5}$ 且知實軸平行 x 軸

所以中心為 $(h,k)=(1,-1)$

焦點為 $(h\pm c,k)=(1\pm\sqrt{5},-1)$

頂點為 $(h\pm a,k)=(1\pm 1,-1)$

即 $(2,-1)$ 、 $(0,-1)$

實軸長為 $2a=2$

7. 一雙曲線的兩漸近線為 $4x-3y=0$ 與 $4x+3y=0$ ，且通過點 $(3\sqrt{2},4)$ ，求其方程式。

【解】設雙曲線方程式為 $(4x-3y)(4x+3y)=t$

將點 $(3\sqrt{2},4)$ 代入方程式得 $(12\sqrt{2}-12)(12\sqrt{2}+12)=t$

即 $t=144$ ，故得方程式為 $(4x-3y)(4x+3y)=144$

即 $16x^2-9y^2=144$