

2

式的運算

2-2 餘式與因式定理

1. 求 $f(x) = x^{2009} - 1$ 除以 $x+1$ 的餘式。

解

2. 求 $f(x) = 8x^3 - 2x + 3$ 除以 $2x - 3$ 的餘式。

解

3. 若 $f(x) = x^4 - 5x^3 - 61x^2 - 54x - 8$ ，求 $f(11)$ 之值。

解

4. 若 $f(x)$ 除以 $x+2$ 的餘式為 -1 ， $f(x)$ 除以 $x+3$ 的餘式為 -3 ，試求 $f(x)$ 除以 $(x+2)(x+3)$ 的餘式。

解

5. 若 $x-2$ 為 $f(x) = x^3 + ax^2 - 3x - 10$ 的因式，求 a 之值。

解

6. 因式分解下列各多項式：

(1) $x^4 + 2x^2 + 1$ (2) $x^4 - 16$ (3) $x^3 + 27$ (4) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

解

7. 求 $f(x) = 2(x+3)^2(x-5)^3$ 與 $g(x) = 3(x+3)^3(x-5)$ 的最高公因式及最低公倍式。

解

8. 求 $f(x)=x^3+1$ 與 $g(x)=x^4-1$ 的最高公因式及最低公倍式。

解

9. 若 $f(x)$ 為二次多項式，且 $f(-1)=f(1)=0$ ，又 $f(2)=9$ ，求 $f(x)$ 。

解

2

式的運算

2-3 分式與根式的運算

1. 化簡 $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2}$ 。

解

2. 化簡 $\frac{x}{x-1} - \frac{x+1}{x-2}$ 。

解

3. 化簡 $\frac{x^2+x-2}{x^2-2x-3} \times \frac{x^2-4x+3}{x^2-2x+1}$ 。

解

4. 化簡 $\frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 9} \div \frac{x - 4}{x + 3}$ 。

解

5. 分解 $\frac{x + 8}{(x - 2)(x + 3)}$ 為部分分式。

解

6. 分解 $\frac{2x^2 - 3x + 10}{(x+1)(x-2)(x-4)}$ 為部分分式。

解

7. 化簡 $\sqrt{80} + \sqrt{125} - \sqrt{20}$ 。

解

8. 將下列分式的分母有理化：

(1) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

(2) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}$

解

9. 化簡根式 $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ 。

解

10. 化簡根式 $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ 。

解

3

方程式

3-1 多項方程式

1. 利用因式分解法，解方程式 $2x^2 - 5x + 2 = 0$ 。

解

2. 利用配方法，解方程式 $x^2 + 10x - 299 = 0$ 。

解

3. 利用公式解法，解方程式 $3x^2 + 4x - 1 = 0$ 。

解

4. 若方程式 $x^2 - kx + (k - 1) = 0$ 有兩個相等實根，求 k 之值。

解

5. 若 α 、 β 為方程式 $x^2 - 4x - 1 = 0$ 之兩根，求下列各式之值：

(1) $\alpha^2 + \beta^2$

(2) $\alpha^3 + \beta^3$

(3) $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$



6. 解方程式 $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ 。



7. 解方程式 $x^3 + 2x^2 - 13x + 10 = 0$ 。



8. 求方程式 $(x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 12) - 24 = 0$ 的實數解。



2

式的運算

2-2 餘式與因式定理

1. 求 $f(x) = x^{2009} - 1$ 除以 $x+1$ 的餘式。

《解》由餘式定理知

$$\begin{aligned}\text{餘式為 } f(-1) &= (-1)^{2009} - 1 \\ &= -1 - 1 = -2\end{aligned}$$

2. 求 $f(x) = 8x^3 - 2x + 3$ 除以 $2x - 3$ 的餘式。

《解》由餘式定理知

$$\begin{aligned}\text{餘式為 } f\left(\frac{3}{2}\right) &= 8 \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 2 \times \frac{3}{2} + 3 \\ &= 27 - 3 + 3 = 27\end{aligned}$$

3. 若 $f(x) = x^4 - 5x^3 - 61x^2 - 54x - 8$ ，求 $f(11)$ 之值。

《解》因為 $f(11)$ 表示 $f(x)$ 除以 $x-11$ 的餘式

由綜合除法：

$$\begin{array}{r|rrrrr} 11 & 1 & -5 & -61 & -54 & -8 \\ & & +11 & +66 & +55 & +11 \\ \hline & 1 & +6 & +5 & +1 & +3 \end{array}$$

故得 $f(11) = 3$

4. 若 $f(x)$ 除以 $x+2$ 的餘式為 -1 ， $f(x)$ 除以 $x+3$ 的餘式為 -3 ，試求 $f(x)$ 除以 $(x+2)(x+3)$ 的餘式。

《解》設 $f(x) = (x+2)(x+3)q(x) + a(x+2) + r$

$$\text{由 } f(-2) = r = -1$$

$$\text{又 } f(-3) = a(-3+2) - 1 = -3$$

$$\text{得 } a = 2$$

$$\text{故得餘式為 } 2(x+2) - 1 = 2x + 3$$

5. 若 $x-2$ 為 $f(x) = x^3 + ax^2 - 3x - 10$ 的因式，求 a 之值。

《解》因為 $x-2 \mid f(x)$

$$\text{所以 } f(2) = 2^3 + a \times 2^2 - 3 \times 2 - 10 = 0$$

$$\text{得 } 4a = 8, \text{ 故 } a = 2$$

6. 因式分解下列各多項式：

(1) $x^4 + 2x^2 + 1$ (2) $x^4 - 16$ (3) $x^3 + 27$ (4) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

解

(1) $x^4 + 2x^2 + 1$

$$= (x^2)^2 + 2 \times x^2 \times 1 + 1^2$$

$$= (x^2 + 1)^2$$

(2) $x^4 - 16$

$$= (x^2)^2 - 4^2$$

$$= (x^2 + 4)(x^2 - 4)$$

$$= (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$$

(3) $x^3 + 27$

$$= x^3 + 3^3$$

$$= (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$$

(4) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

$$= (2x)^3 + 3 \times (2x)^2 \times 1 + 3 \times 2x \times 1^2 + 1^3$$

$$= (2x + 1)^3$$

7. 求 $f(x) = 2(x+3)^2(x-5)^3$ 與 $g(x) = 3(x+3)^3(x-5)$ 的最高公因式及最低公倍式。

解

$f(x)$ 與 $g(x)$ 的最高公因式為 $(x+3)^2(x-5)$

$f(x)$ 與 $g(x)$ 的最低公倍式為 $(x+3)^3(x-5)^3$

8. 求 $f(x) = x^3 + 1$ 與 $g(x) = x^4 - 1$ 的最高公因式及最低公倍式。

《解》因為 $f(x) = x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$

$$g(x) = x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^2 + 1)(x+1)(x-1)$$

所以其最高公因式為 $x+1$

最低公倍式為 $(x+1)(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)(x-1)$

9. 若 $f(x)$ 為二次多項式，且 $f(-1) = f(1) = 0$ ，又 $f(2) = 9$ ，求 $f(x)$ 。

《解》設 $f(x) = a(x+1)(x-1)$

$$\text{由 } f(2) = a(2+1)(2-1) = 9$$

得 $a = 3$

$$\text{故得 } f(x) = 3(x+1)(x-1)$$

2-3 分式與根式的運算

1. 化簡 $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2}$ 。

《解》原式 = $\frac{1 \times (x+2) + 2(x+1)}{(x+1)(x+2)}$
 $= \frac{3x+4}{(x+1)(x+2)}$

2. 化簡 $\frac{x}{x-1} - \frac{x+1}{x-2}$ 。

《解》原式 = $\frac{x(x-2) - (x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)}$
 $= \frac{-2x+1}{(x-1)(x-2)}$

3. 化簡 $\frac{x^2+x-2}{x^2-2x-3} \times \frac{x^2-4x+3}{x^2-2x+1}$ 。

《解》原式 = $\frac{(x+2)(x-1)}{(x-3)(x+1)} \times \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)^2}$
 $= \frac{x+2}{x+1}$

4. 化簡 $\frac{x^2-2x-8}{x^2-9} \div \frac{x-4}{x+3}$ 。

解 原式 $= \frac{(x-4)(x+2)}{(x+3)(x-3)} \times \frac{x+3}{x-4}$
 $= \frac{x+2}{x-3}$

5. 分解 $\frac{x+8}{(x-2)(x+3)}$ 為部分分式。

解 設 $\frac{x+8}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$

上式兩端同乘以 $(x-2)(x+3)$ 得

$$x+8 = A(x+3) + B(x-2)$$

令 $x=2$ 代入，得

$$2+8 = A(2+3), \text{ 即 } A=2$$

令 $x=-3$ 代入，得

$$-3+8 = B(-3-2), \text{ 即 } B=-1$$

故得 $\frac{x+8}{(x-2)(x+3)} = \frac{2}{x-2} + \frac{-1}{x+3}$

6. 分解 $\frac{2x^2-3x+10}{(x+1)(x-2)(x-4)}$ 為部分分式。

解 設 $\frac{2x^2-3x+10}{(x+1)(x-2)(x-4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-4}$

上式兩端同乘以 $(x+1)(x-2)(x-4)$

$$\text{得 } 2x^2 - 3x + 10$$

$$= A(x-2)(x-4) + B(x+1)(x-4) + C(x+1)(x-2)$$

令 $x = -1$ 代入，得

$$2 + 3 + 10 = A(-1-2)(-1-4)$$

$$\text{即 } A = 1$$

令 $x = 2$ 代入，得

$$8 - 6 + 10 = B(2+1)(2-4)$$

$$\text{即 } B = -2$$

令 $x = 4$ 代入，得

$$32 - 12 + 10 = C(4+1)(4-2)$$

$$\text{即 } C = 3$$

$$\text{故得 } \frac{2x^2-3x+10}{(x+1)(x-2)(x-4)} = \frac{1}{x+1} + \frac{-2}{x-2} + \frac{3}{x-4}$$

7. 化簡 $\sqrt{80} + \sqrt{125} - \sqrt{20}$ 。

解 原式 $= \sqrt{4^2 \times 5} + \sqrt{5^2 \times 5} - \sqrt{2^2 \times 5}$
 $= 4\sqrt{5} + \sqrt{5} - 2\sqrt{5}$
 $= 3\sqrt{5}$

8. 將下列分式的分母有理化：

$$(1) \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad (1) \quad \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} &= \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} \\ &= \frac{5-2\sqrt{15}+3}{5-3} \\ &= 4-\sqrt{15}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad \frac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1} &= \frac{1 \times (\sqrt[3]{2}+1)}{(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{2}+1)} \\ &= \frac{\sqrt[3]{2}+1}{3}\end{aligned}$$

9. 化簡根式 $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ 。

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \sqrt{5-2\sqrt{6}} &= \sqrt{(3+2)-2\sqrt{3 \times 2}} \\ &= \sqrt{3}-\sqrt{2}\end{aligned}$$

10. 化簡根式 $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ 。

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \sqrt{2+\sqrt{3}} &= \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

3

方程式

3-1 多項方程式

1. 利用因式分解法，解方程式 $2x^2 - 5x + 2 = 0$ 。

解 利用十字交乘法

$$\begin{array}{r} 2x \quad -1 \\ \quad \times \\ x \quad -2 \end{array}$$

$$\text{得 } (2x-1)(x-2)=0$$

$$\text{故 } x = \frac{1}{2} \text{ 或 } 2$$

2. 利用配方法，解方程式 $x^2 + 10x - 299 = 0$ 。

解 $x^2 + 10x - 299 = 0$

$$\text{配方得 } x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 = 299 + 5^2$$

$$\text{即 } (x+5)^2 = 324 = 18^2$$

$$\text{得 } x+5 = \pm 18$$

$$\text{故 } x = 13 \text{ 或 } -23$$

3. 利用公式解法，解方程式 $3x^2 + 4x - 1 = 0$ 。

解 由根的公式得

$$\begin{aligned} x &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 3 \times (-1)}}{2 \times 3} \\ &= \frac{-4 \pm 2\sqrt{7}}{6} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{7}}{3} \end{aligned}$$

4. 若方程式 $x^2 - kx + (k-1) = 0$ 有兩個相等實根，求 k 之值。

《解》判別式

$$b^2 - 4ac = (-k)^2 - 4 \times 1 \times (k-1)$$

$$= k^2 - 4k + 4$$

因為有兩個相等實根

$$\text{所以 } k^2 - 4k + 4 = 0$$

$$\text{得 } (k-2)^2 = 0, \text{ 故 } k = 2$$

5. 若 α 、 β 為方程式 $x^2 - 4x - 1 = 0$ 之兩根，求下列各式之值：

$$(1) \alpha^2 + \beta^2$$

$$(2) \alpha^3 + \beta^3$$

$$(3) \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$$

《解》由根與係數關係得 $\alpha + \beta = 4$ ， $\alpha\beta = -1$

$$(1) \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= 4^2 - 2 \times (-1)$$

$$= 16 + 2 = 18$$

$$(2) \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

$$= 4 \times (18 + 1) = 76$$

$$(3) \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha\beta} = \frac{18}{-1} = -18$$

6. 解方程式 $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ 。

《解》由分組分解得

$$x^2(x-3) - 4(x-3) = 0$$

$$\text{得 } (x-3)(x^2 - 4) = 0$$

$$\text{分解得 } (x-3)(x+2)(x-2) = 0$$

故 $x = 3$ 或 -2 或 2

7. 解方程式 $x^3 + 2x^2 - 13x + 10 = 0$ 。

解 設 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10$

若 $ax - b \mid f(x)$ ，則 $a \mid 1$ 且 $b \mid 10$

所以 $ax - b$ 的可能情形有

$x \pm 1$ 、 $x \pm 2$ 、 $x \pm 5$ 、 $x \pm 10$ 等 8 種

由綜合除法可檢驗出第一個一次因式

如下：

1	+2	-13	+10	1
	+1	+3	-10	
1				0
1	+3	-10		

得 $f(x) = (x-1)(x^2 + 3x - 10)$

$$= (x-1)(x-2)(x+5)$$

$$\text{即 } (x-1)(x-2)(x+5) = 0$$

故 $x = 1$ 或 2 或 -5

8. 求方程式 $(x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 12) - 24 = 0$ 的實數解。

解 令 $x^2 + 7x = t$ ，則原式可化為

$$(t+10)(t+12) - 24 = 0$$

$$\text{整理得 } t^2 + 22t + 96 = 0$$

$$\text{分解得 } (t+6)(t+16) = 0$$

$$\text{故 } t = -6 \text{ 或 } t = -16$$

$$\text{即 } x^2 + 7x = -6 \text{ 或 } x^2 + 7x = -16$$

$$\text{得 } x^2 + 7x + 6 = 0 \text{ 或 } x^2 + 7x + 16 = 0$$

$$\text{當 } x^2 + 7x + 6 = 0 \text{ 時}$$

$$\text{得 } (x+1)(x+6) = 0, \text{ 即 } x = -1 \text{ 或 } -6$$

$$\text{當 } x^2 + 7x + 16 = 0 \text{ 時}$$

其判別式

$$b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times 1 \times 16 = -15 < 0$$

故無實數解

綜合上述，得 $x = -1$ 或 -6

